Haufen	Autor	Leuchtkraftfunktion	Gesamtzahl	Gesamtmasse	mittlere Sternmasse
M 3	Lohmann	Kuiper (*b*) 1942	118000	64000	0.54 ⊙
		Kuiper (*c*) 1942	227000	77000	0.34
M 13	Pariiski	Kapteyn-v. Rhijn 1920	430000	272000	0.63
		Seares 1924	680000	304000	0.45
	Pariiski (red.)	Kapteyn-v. Rhijn 1920	226000	143000	0.63
		Seares 1924	358000	160000	0.45
	Lohmann	Kuiper (*b*) 1942	186000	97000	0.52
		Kuiper (*c*) 1942	360000	118000	0.33
M 92	Hachenberg	—	300000	250000	0.83

Tab. 6. Zusammenstellung der vorhandenen Abschätzungen.

cher als $M\,3$ und $M\,13$ ist, so könnten $1{,}5 \times 10^5\,\odot$ vielleicht noch etwas zu hoch geschätzt sein. Wenn man berücksichtigt, daß diese drei Haufen nach Shapley[5] mit ihren absoluten Helligkeiten gut dem allgemeinen Durchschnitt entsprechen, so erscheint es berechtigt, als Gesamtmasse bzw. Sternzahl eines mittleren kugelförmigen Sternhaufens 120000 Sonnenmassen bzw. 240000 Sterne anzusetzen. Die Grenzen für die Haufen größerer oder kleinerer absoluter Gesamthelligkeit dürfte in der Anlehnung an Shapleys Verteilung der absoluten Helligkeiten von 30 Haufen[5] nach beiden Seiten durch den Faktor 10 gegeben sein, d. h. grob zwischen 10^4 und 10^6 Sonnenmassen liegen.

Skalares Materiefeld in der projektiven Relativitätstheorie mit variabler Gravitationsinvarianten

Von Günther Ludwig

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforschg. **2a**, 482—489 [1947]; eingegangen am 20. Mai 1947)

Die Feldgleichungen für ein ungeladenes und geladenes skalares Materiefeld werden aufgestellt und in speziellen Fällen gelöst, um den Einfluß einer variablen Gravitationsinvarianten zu untersuchen. Die Ausdrücke für den Energie-Impulstensor werden abgeleitet und an ihnen die in einer früheren Note[1] allgemein abgeleiteten Eigenschaften diskutiert. Die Bedeutung der fünfdimensionalen geodätischen Linien als Bahnen von geladenen Massenpunkten wird abgeleitet.

In einer früheren Note[1] wurden allgemein der Materietensor und die aus ihm ableitbaren Erhaltungssätze untersucht in besonderer Hinsicht auf den Einfluß einer variablen Gravitationskonstanten.

Hier sollen die eben erwähnten allgemeinen Betrachtungen an einem möglichst einfachen Beispiel erläutert und vertieft werden. Insbesondere ist die Bedeutung der Materieinvarianten b^1 näher zu beleuchten, und es ist festzustellen, mit welchem Recht wir sie gleich Null setzen können, so wie wir es in M 2 (68) getan haben.

Gesucht ist also eine Invariantendichte $\mathfrak{L}$ (als Wirkungsgröße für die Materie). Die Materie wollen wir durch eine einzige reelle skalare Funktion ψ beschreiben. ψ sei weiterhin homogen vom Grade Null in den X^ν, so daß (es bedeutet $\psi_{|\nu} = \partial\psi/\partial X^\nu$, vergl. M 1 und M 2):

$$\psi_{|\nu} X^\nu = 0 .$$

Der einfachste und naheliegendste Ansatz für $\mathfrak{L}$ wäre $\mathfrak{L} = L\sqrt{-g}$ mit

[1] G. Ludwig, Z. Physik (im Erscheinen). Diese Note besteht aus zwei Mitteilungen. Hinweise auf diese Mitteilungen werden kurz durch M 1 bzw. M 2 bezeichnet. Z. B. ist M 2 (5) die Formel (5) aus der 2. Mitteilung.

$$L = \frac{1}{2}\left[a(J)\,\psi^{|\nu}\,\psi_{|\nu} + \beta(J)\,\psi^2\right]. \tag{1}$$

Die Feldgleichungen für ψ ergeben sich leicht zu

$$(a\,\psi^{|\nu})_{||\nu} - \beta\,\psi = 0. \tag{2}$$

Nach M 2 (10) ist wegen

$$\psi^{|\nu}\,\psi_{|\nu} = \psi^{|k}\,\psi_{|k}$$

$$\overset{4}{L} = J^{1/2}\frac{1}{2}\left[a\,\psi^{|k}\,\psi_{|k} + \beta\,\psi^2\right], \tag{3}$$

woraus sich sofort die Feldgleichungen in affiner Form ergeben:

$$(J^{1/2}\,a\,\psi^{|k})_{\underset{4}{||k}} - J^{1/2}\,\beta\,\psi = 0. \tag{4}$$

Dasselbe erhält man auch durch direkte Rechnung aus (2) mit Hilfe der Formel (28) aus M 1. Da ψ ein Skalar ist, so ist nach M 2 (52) $\mathfrak{W}^{\mu\varrho\lambda} = 0$ und damit auch $\mathfrak{Z}^{\lambda\mu}_{\nu} = 0$. M 2 (49) lautet dann

$$\mathfrak{S}^{\mu}_{\nu} = \mathfrak{L}\,\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial X^{\nu}}X^{\mu} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi_{|\mu}}\psi_{|\nu};$$

oder

$$\begin{aligned} S^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}(a\,\psi^{|\lambda}\,\psi_{|\lambda} + \beta\,\psi^2)\,\delta^{\mu}_{\nu} - a\,\psi^{|\mu}\,\psi_{|\nu} \\ + (a'\,\psi^{|\lambda}\,\psi_{|\lambda} + \beta'\,\psi^2)\,X_{\nu}\,X^{\mu}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei a' und β' die Ableitungen von a und β nach J sind. Hieraus ergibt sich die affine Aufspaltung:

$$S^{m}_{n} = \frac{1}{2}(a\,\psi^{|k}\,\psi_{|k} + \beta\,\psi^2)\,\delta^{m}_{n} - a\,\psi^{|m}\,\psi_{|n};$$

$$S^{(0)\,m} = 0;$$

$$\begin{aligned} S^{(0)\,(0)} = J(a'\,\psi^{|k}\,\psi_{|k} + \beta'\,\psi^2) \\ + \frac{1}{2}(a\,\psi^{|k}\,\psi_{|k} + \beta\,\psi^2). \end{aligned}$$

Für den Vierermaterientensor folgt also nach M 2 (16)

$$\begin{aligned} \overset{4}{S}{}^{m}_{n} = \frac{1}{2}J^{1/2}(a\,\psi^{|k}\,\psi_{|k} + \beta\,\psi^2)\,\delta^{m}_{n} \\ - J^{1/2}\,a\,\psi^{|m}\,\psi_{|n}. \end{aligned} \tag{6}$$

Der Materievektor ist gleich Null:

$$t^{m} = 0. \tag{7}$$

Die Materieinvariante ist

$$\begin{aligned} b = \frac{1}{2}J^{1/2}(a'\,\psi^{|k}\,\psi_{|k} + \beta'\,\psi^2) \\ + \frac{1}{4}J^{-1/2}(a\,\psi^{|k}\,\psi_{|k} + \beta\,\psi^2). \end{aligned} \tag{8}$$

Da $t^{m} = 0$ ist, stellt also das ψ-Feld ungeladene Materie dar. Das einfachste Feld, um auch geladene Materie zu beschreiben, erhält man, wenn man Ψ als komplex ansetzt und bei der Gruppe $\mathfrak{P}$[2]

$$\mathfrak{T}_{\varrho}\,\Psi = e^{i\,l\,\log\varrho}\,\Psi \tag{9}$$

annimmt. Es liegt also das in M 2 bei der Definition von H_{ϱ} als zweites angeführte Beispiel vor. Der Operator H_{ϱ} hat den Wert

$$H_{\varrho} = e^{i\,l\,\log\varrho}. \tag{10}$$

Die einfachste, vom nullten Grade homogene Lagrange-Funktion ist

$$L = \frac{1}{2}(a\,\Psi^{*\,||\nu}\,\Psi_{||\nu} + \beta\,\Psi^{*}\,\Psi).\,^{3} \tag{11}$$

Die Feldgleichungen lauten

$$(a\,\Psi^{||\nu})_{||\nu} - \beta\,\Psi = 0. \tag{12}$$

Der Materietensor lautet:

$$\left.\begin{aligned} S^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}(a\,\Psi^{*\,||\lambda}\,\Psi_{||\lambda} + \beta\,\Psi^{*}\,\Psi)\,\delta^{\mu}_{\nu} \\ - \frac{1}{2}\,a\,(\Psi^{*\,||\mu}\,\Psi_{||\nu} + \Psi^{*}_{||\nu}\,\Psi^{||\mu}) \\ - \frac{i}{2}\,a\,l\,J^{-1}(\Psi^{*}_{||\nu}X^{\mu}\Psi + \Psi^{*\,||\mu}X_{\nu}\Psi \\ - \Psi_{||\nu}\,X^{\mu}\,\Psi^{*} - \Psi^{||\mu}\,X_{\nu}\,\Psi^{*}) \\ + (a'\,\Psi^{*||\lambda}\,\Psi_{||\lambda} + \beta'\,\Psi^{*}\,\Psi)\,X_{\nu}\,X^{\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Bei der affinen Aufspaltung ergibt sich aber gegenüber dem reellen Falle ein wesentlicher Unterschied, der darauf beruht, daß $H_{\varrho} \neq 1$ ist. Wir wollen deshalb die kovariante Ableitung eines Nicht-Normalvektors a^{ν} allgemein berechnen. Es sei also

$$\mathfrak{T}_{\varrho}\,a^{\nu} = \varrho\,H_{\varrho}\,a^{\nu} = \varrho\,e^{\Pi\log\varrho}\,a^{\nu}.$$

Der normalisierte Vektor $\boldsymbol{a}^{\nu}$ ist also nach M 2

[2] Definition von $\mathfrak{P}$ in M 2.

[3] Hierbei ist nach M 2 (38): $\Psi_{||\nu} = \Psi_{|\nu} - i\,l\,Y_{\nu}\,\Psi$.

(40) gegeben durch

$$a^{\nu} = e^{\Pi \log \eta} \boldsymbol{a}^{\nu}.$$

Somit ist also

$$a^{(\nu)}{}_{||(\mu)} = (\log \eta)_{|\mu} \Pi H_\eta \boldsymbol{a}^{(\nu)} + H_\eta \boldsymbol{a}^{(\nu)}_{|\mu} + \omega^{(\nu)}_{\mu(\lambda)} H_\eta \boldsymbol{a}^{(\lambda)} - Y_\mu \Pi a^{(\nu)}.$$

Nach M 1 (15) ist

$$(\log \eta)_{|\mu} = Y_\mu - \varphi_\mu.$$

Dann läßt sich aber sofort die Rechnung von M 1 (27) übertragen mit dem Ergebnis

$$\left.\begin{aligned} a^{(0)}{}_{||(0)} &= H_\eta \frac{1}{2} J^{-1} J_{|n} \boldsymbol{a}^n; \\ a^l{}_{||(0)} &= H_\eta \left[-\frac{1}{2} J^{1/2} F^l_n \boldsymbol{a}^n - \frac{1}{2} J^{-1} J^{|l} \boldsymbol{a}^{(0)} \right]; \\ a^{(0)}{}_{||m} &= H_\eta \left[-\varphi_m \Pi \boldsymbol{a}^{(0)} + \boldsymbol{a}^{(0)}_{|m} + \frac{1}{2} J^{1/2} F_{nm} \boldsymbol{a}^n \right]; \\ a^l{}_{||m} &= H_\eta \left[-\varphi_m \Pi \boldsymbol{a}^l + \boldsymbol{a}^l_{\underset{4}{||} m} + \frac{1}{2} J^{1/2} F_m{}^l \boldsymbol{a}^{(0)} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die Operation

$$(t:::)_{|\mathsf{L}\, k} = (t:::)_{\underset{4}{||} k} - \varphi_k \Pi t::: \tag{15}$$

pflegt man als Eich-Maß-Differentiation zu bezeichnen. Man kann dann schreiben:

$$\begin{aligned} a^{(0)}{}_{||m} &= H_\eta \left[\boldsymbol{a}^{(0)}_{\mathsf{L}\, m} + \frac{1}{2} J^{1/2} F_{nm} \boldsymbol{a}^n \right]; \\ a^l{}_{||m} &= H_\eta \left[\boldsymbol{a}^l_{|\mathsf{L}\, m} + \frac{1}{2} J^{1/2} F_m{}^l \boldsymbol{a}^{(0)} \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Um die eben gegebene ganz allgemeine Ableitung in dem vorliegenden Falle anwenden zu können, ist noch $\Psi_{||\nu}$ affin zu zerspalten. Aus

$$\Psi = e^{il \log \eta} \psi = H_\eta \psi$$

folgt ähnlich wie oben

$$\Psi_{||\nu} = H_\eta [\psi_{|\nu} - i l \varphi_\nu \psi],$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_{||(0)} &= 0, \\ \Psi_{||(k)} &= H_\eta \psi_{\mathsf{L}(k)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Hier ist speziell

$$\psi_{\mathsf{L}\, k} = \psi_{|k} - i l \varphi_k \psi.$$

In die obigen Formeln setzen wir nun $a^\nu = \alpha \Psi^{||\nu}$ und $a^\nu = H_\eta \boldsymbol{a}^\nu$ ein.

Dann folgt

$$\begin{aligned} (\alpha \Psi^{||(0)})_{||(0)} &= H_\eta \frac{1}{2} \alpha J^{-1} J_{|n} \psi^{\mathsf{L}\, n}; \\ (\alpha \Psi^{||(k)})_{||(k)} &= H_\eta (\alpha \psi^{\mathsf{L}\, k})_{|\mathsf{L}\, k}; \end{aligned} \tag{18}$$

und somit wegen

$$(\alpha \Psi^{||\nu})_{||\nu} = (\alpha \Psi^{||(0)})_{||(0)} + (\alpha \Psi^{||k})_{||k}$$

$$H_\eta^{-1} (\alpha \Psi^{||\nu})_{||\nu} = (\alpha \psi^{\mathsf{L}\, k})_{|\mathsf{L}\, k} + \frac{1}{2} \alpha J^{-1} J_{|k} \psi^{\mathsf{L}\, k},$$

$$H_\eta^{-1} (\alpha \Psi^{||\nu})_{||\nu} = J^{-1/2} (J^{1/2} \alpha \psi^{\mathsf{L}\, k})_{|\mathsf{L}\, k}. \tag{19}$$

Die Feldgleichungen (12) gehen daher über in

$$(J^{1/2} \alpha \psi^{\mathsf{L}\, k})_{|\mathsf{L}\, k} - \beta J^{1/2} \psi = 0. \tag{20}$$

Diese Feldgleichung ergibt sich auch direkt aus der affinen Lagrange-Funktion

$$\overset{4}{L} = \frac{1}{2} J^{1/2} [\alpha \psi^{*\mathsf{L}\, k} \psi_{\mathsf{L}\, k} + \beta \psi^* \psi],$$

die mit (17) unmittelbar aus (11) folgt.

Die affine Aufspaltung des Materietensors ergibt

$$S^m_n = \frac{1}{2} (\alpha \psi^{*\mathsf{L}\, l} \psi_{\mathsf{L}\, l} + \beta \psi^* \psi) \delta^m_n - \frac{1}{2} \alpha (\psi^{*\mathsf{L}\, m} \psi_{\mathsf{L}\, n} + \psi^*_{\mathsf{L}\, n} \psi^{\mathsf{L}\, m});$$

$$S^m_{(0)} = \frac{i}{2} \alpha J^{-1/2} l (\psi^{\mathsf{L}\, m} \psi^* - \psi^{*\mathsf{L}\, m} \psi);$$

$$S_{(0)(0)} = \frac{1}{2} (\alpha \psi^{*\mathsf{L}\, l} \psi_{\mathsf{L}\, l} + \beta \psi^* \psi) + J (\alpha' \psi^{*\mathsf{L}\, l} \psi_{\mathsf{L}\, l} + \beta' \psi^* \psi).$$

Damit ist der Vierermaterietensor

$$\overset{4}{S}{}^m_n = \frac{1}{2} J^{1/2} (\alpha \psi^{*\mathsf{L}\, l} \psi_{\mathsf{L}\, l} + \beta \psi^* \psi) \delta^m_n - \frac{1}{2} \alpha J^{1/2} (\psi^{*\mathsf{L}\, m} \psi_{\mathsf{L}\, n} + \psi^*_{\mathsf{L}\, n} \psi^{\mathsf{L}\, m}), \tag{21}$$

der Materievektor

$$t^m = \frac{i}{2} J^{1/2} \alpha l (\psi^{\mathsf{L}\, m} \psi^* - \psi^{*\mathsf{L}\, m} \psi) \tag{22}$$

und die Materieinvariante:

$$b = \frac{1}{4} J^{-1/2} (a\, \psi^{*\mathsf{L}\, l} \psi_{\mathsf{L}\, l} + \beta\, \psi^* \psi) + \frac{1}{2} J^{1/2} (a'\, \psi^{*\mathsf{L}\, l} \psi_{\mathsf{L}\, l} + \beta'\, \psi^* \psi). \tag{23}$$

Da $t^m \neq 0$ ist, stellt also dieses Feld geladene Materie dar. Die aufgestellten Beziehungen mögen nun physikalisch diskutiert werden.

Zunächst wollen wir die Bewegung der Materiewellen selbst genauer untersuchen. Hierbei wollen wir als erstes spezielle Lösungen der Form

$$\Psi = A\, e^{i \varphi (X^\nu)} \tag{24}$$

betrachten. $\varphi(X^\nu)$ ist die Phasen- oder Eikonalfunktion der Welle. Von dieser wollen wir die weiteren Voraussetzungen machen, daß $|\varphi_{||\nu}| \gg |a' J_{|\nu}| + |\varphi^{||\nu}{}_{||\nu}|$. Physikalisch besagt dies, daß die Phase φ sehr stark variiert, z. B. oszilliert in Gebieten, in denen sich das metrische Feld noch nicht stark ändert, und daß die Änderung von $\varphi_{||\nu}$ wiederum klein ist gegenüber $\varphi_{||\nu}$ selbst. Aus (24) folgt

$$\Psi_{||\nu} = A\, i\, \varphi_{||\nu}\, e^{i\varphi};\,[4]$$

$$(a\,\Psi^{||\nu})_{||\nu} = A\,[-a\,\varphi^{||\nu} \varphi_{||\nu} + i\,(a\,\varphi^{||\nu})_{||\nu}]\, e^{i\varphi},$$

und unter den gemachten Voraussetzungen:

$$(a\,\Psi^{||\nu})_{||\nu} \sim -A\, a\, \varphi^{||\nu} \varphi_{||\nu}\, e^{i\varphi}.$$

Aus (12) folgt dann für die Phasenfunktion φ die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$a\, \varphi^{||\nu} \varphi_{||\nu} + \beta = 0, \tag{25}$$

die der Eikonalgleichung der geometrischen Optik entspricht. Den Strahlen der geometrischen Optik entsprechen die Charakteristiken von (25):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX^\nu}{ds} &= 2\, a\, p^\nu; \\ \frac{d\varphi}{ds} &= 2\, a\, p_\nu p^\nu; \\ F(X^\nu_{|} p_\nu) &= a\, p_\nu p^\nu - a\, l^2 J^{-1} + \beta; \\ \frac{dp_\nu}{ds} &= -(a'\, p_\mu p^\mu + \beta' - a'\, l^2 J^{-1} \\ &\quad + a\, l^2 J^{-2}) J_{|\nu} - a\, p_\sigma g^{\sigma\mu}_{\ |\nu} p_\mu. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

[4] Hierbei ist entsprechend (28) und nach M 2 (38): $\varphi_{||\nu} = \varphi_{|\nu} - l Y_\nu$.

$F(X_| p_\nu)$ ist dann bekanntlich ein Integral der Charakteristikengleichungen. Ist für die Anfangsmannigfaltigkeit $p_\nu = \varphi_{|\nu}$, so gilt dies für die ganze Mannigfaltigkeit, die durch diejenigen Charakteristiken aufgespannt wird, die durch die Anfangsmannigfaltigkeit hindurchgehen. (26) läßt sich in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d_{||} p^\nu}{ds} &= p_{\nu||\mu} \frac{dX^\mu}{ds} \\ &= -(a'\, p_\mu p^\mu + \beta' + a\, l^2 J^{-2} - a'\, l^2 J^{-1}) J_{|\nu}. \end{aligned} \tag{27}$$

Aus (9) und (24) folgt

$$\Psi_{|\nu} X^\nu = i\, l\, \Psi = i\, \varphi_{|\nu} \Psi X^\nu,$$

d. h.

$$\varphi_{|\nu} X^\nu = l. \tag{28}$$

φ ist also ein Skalar, aber keine Invariante, da es nicht homogen vom Grade Null ist. (28) lautet mit $\varphi_{|\nu} = p_\nu$:

$$p_\nu X^\nu = l. \tag{29}$$

Da aus (28) sofort $\varphi_{|\mu|\nu} X^\nu = -\varphi_{|\mu}$, d. h. $p_{\nu|\mu} X^\mu = -p_\nu$ folgt, so ist p_ν ein Normalvektor.

Deutet man nun die Strahlen als Bewegung von Teilchen, so ist die Bahn dieser Teilchen durch (27) gegeben, wenn man noch bedenkt, daß nach (29) und (26)

$$\left.\begin{aligned} p_{(0)} &= J^{-1/2}\, l, \\ p_n &= \frac{1}{2\,a} \frac{dx^n}{ds} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

ist. Damit (30) sinnvoll ist, muß noch gezeigt werden, daß (29) erfüllt bleibt, falls es zu Anfang erfüllt ist. Dies folgt aber aus der oben erwähnten Eigenschaft der Charakteristiken, da $p_\nu = \varphi_{|\nu}$ bleibt, wenn zu Anfang $p_\nu = \varphi_{|\nu}$ ist. So muß auch (29) als Folge von (28) erhalten bleiben.

Um die charakteristischen Strahlen zu diskutieren, gehen wir von (27) aus:

$$p_{\nu||\mu}\, p^\mu = -\frac{J_{|\nu}}{2\,a} (a'\, p_\mu p^\mu + \beta' + a\, l^2 J^{-2} - a'\, l^2 J^{-1}). \tag{31}$$

Die Verkürzung dieser Gleichung gewinnt man leicht mit Hilfe der Formeln (30) und M 1 (27). Man erhält die beiden Gleichungen

$$l_{|m} \frac{dx^m}{ds} = \frac{dl}{ds} = 0 \,, \tag{32}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d_{\underset{4}{||}} p_n}{ds} &= p_{n \underset{4}{||} m} \frac{dx^m}{ds} \\ &= l\, F_{nl} \frac{dx^l}{ds} - (\alpha' p^l p_l + \beta') J_{|n} \,. \end{aligned} \tag{33}$$

(32) ist mit dem Erfülltbleiben der Gl. (29) identisch. Um (33) zu diskutieren, ist die Verknüpfung des Parameters s mit der Eigenzeit τ festzustellen, wobei $d\tau^2 = -dx^k dx_k$ ist. Aus (30) folgt

$$d\tau^2 = -4\,\alpha^2 p^k p_k\, ds^2 \,. \tag{34}$$

(25) mit $\varphi_{|\nu} = p_\nu$ ergibt die Beziehung

$$p^k p_k = -\frac{\beta}{\alpha} \,. \tag{35}$$

Bezeichnen wir nun kurz

$$\frac{\beta}{\alpha} = \mu^2, \tag{36}$$

so ist also:

$$d\tau = 2\,\alpha\,\mu\, ds \,. \tag{37}$$

(33) lautet also dann mit der Vierergeschwindigkeit

$$u^k = \frac{dx^k}{d\tau}$$

und mit (35) bis (37)

$$\begin{aligned} \frac{d_{\underset{4}{||}} (\mu\, u_n)}{d\tau} &= (\mu\, u_n)_{\underset{4}{||} m} u^m \\ &= l\, F_{nl} u^l + \frac{\alpha' \mu^2 - \beta'}{2\,\alpha\,\mu} J_{|n} \,. \end{aligned} \tag{38}$$

Aus $\beta = \alpha \mu^2$ folgt

$$\beta' = \alpha' \mu^2 + 2\,\alpha\,\mu\,\mu' \,.$$

Setzt man dies in (38) ein, so folgt:

$$\frac{d_{\underset{4}{||}} (\mu\, u_n)}{d\tau} = l\, F_{nl} u^l - \mu' J_{|n} \,. \tag{39}$$

In der allgemeinen Relativitätstheorie lautet die Bewegungsgleichung für einen geladenen Massenpunkt der Masse m und Ladung e (Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt):

$$\frac{d_{\underset{4}{||}} (m\, u_n)}{d\tau} = l\, F_{nl} u^l \,. \tag{40}$$

Die Charakteristiken können wir also deuten als die Bewegung von Massenpunkten mit einer Masse proportional zu $\sqrt{\beta/\alpha}$ und einer Ladung e proportional l. Nach (39) und (40) wäre dann

$$\frac{e}{m} = l \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \,. \tag{41}$$

Wenn die Masse m konstant ist, wirkt auf die Massenpunkte vom J-Feld her keine Kraft. Um nun die Größe der Masse selbst, die wir als proportional zu μ erkannten, zu berechnen, betrachten wir nach M 2 (25) den Energieimpulstensor

$$\begin{aligned} T_{ik} = -J^{-1} u^{-1} \Big\{ & \frac{1}{2} [\alpha\, \psi^{*\mathsf{L}\, l}\, \psi_{\mathsf{L}\, l} + \beta\, \psi^* \psi]\, g_{ik} \\ & - \frac{\alpha}{2} [\psi^*_{\mathsf{L}\, i}\, \psi_{\mathsf{L}\, k} + \psi^*_{\mathsf{L}\, k}\, \psi_{\mathsf{L}\, i}] \Big\} \,. \end{aligned} \tag{42}$$

Die Feldvariable Ψ ist bisher noch nicht eindeutig festgelegt, denn man kann statt Ψ ebensogut ein Vielfaches von Ψ benutzen, ohne daß etwas an den physikalischen Aussagen, die sich aus dem Energieimpulstensor und Stromvektor ableiten, geändert wird. Damit aber T_{ik} die übliche Form

$$\begin{aligned} T_{ik} = -\frac{1}{2} \Big\{ & [\psi^{*\mathsf{L}\, l}\, \psi_{\mathsf{L}\, l} + \mu^2 \psi^* \psi]\, g_{ik} \\ & - [\psi^*_{\mathsf{L}\, i}\, \psi_{\mathsf{L}\, k} + \psi^*_{\mathsf{L}\, k} \psi_{\mathsf{L}\, i}] \Big\} \end{aligned}$$

annimmt, wobei dann $\hbar\mu = m$, der Masse der bei Quantisierung dem Feld entsprechenden Teilchen, ist, setzen wir

$$\alpha = J\,u \,, \quad \beta = J\,u\,\mu^2 \,. \tag{43}$$

Diese durch Quantisierung entstehenden Teilchen haben dann die Ladung

$$e = \hbar\, l \tag{44}$$

und bewegen sich, soweit die klassische Beschreibung ausreicht, auf Bahnen nach

$$\frac{d_{\underset{4}{||}} p_n}{d\tau} = e\, F_{nl} u^l - m' J_{|n} \,, \tag{45}$$

wobei der Impuls p_n gegeben ist durch

$$p_n = m\, u_n = \hbar\, \mu\, u_n \,.$$

Ist also die Masse konstant, so beschreiben sie Bahnen, die nicht direkt durch die Veränderlichkeit der Gravitationsinvarianten J beeinflußt werden, sondern nur insofern, als sich das metrische Feld g_{ik} selbst ändert.

Mit (43) und M 2 (30) wird der Ladungsstromvektor:

$$s_r = \frac{i}{2}\, l\,(\psi^*_{\mathsf{L}r}\,\psi - \psi_{\mathsf{L}r}\,\psi^*)\,. \tag{46}$$

Für die nächsten Rechnungen wollen wir das schon in M 2 zugrundegelegte Koordinatensystem benutzen, in dem J nur von x^4 abhängt und für das $g_{44} = -1$, $g_{i4} = 0$ für $i = 1, 2, 3$ ist. Wir wollen versuchen, in diesem Falle die Wellengleichung (4) für das ungeladene Feld zu lösen. Sie lautet mit $\overset{3}{g} = \| g_{ik} \|$ $(i, k = 1, 2, 3)$:

$$\left(\sqrt{\overset{3}{g}}\, J^{1/2}\, \alpha\, \psi^{|k}\right)_{|k} - \sqrt{\overset{3}{g}}\, J^{1/2}\, \beta\, \psi = 0\,. \tag{47}$$

Weiterhin nehmen wir an, daß der räumliche Teil der Welt $(x^1 x^2 x^3)$ eine Hypersphäre vom Radius $\varrho(x^4)$ ist, so daß

$$\begin{aligned} \sqrt{\overset{3}{g}} &= \varrho^3\, \zeta(x^1\, x^2\, x^3)\,, \\ g^{kl} &= \varrho^{-2}\, \gamma^{kl}(x^1\, x^2\, x^3) \text{ für } k, l = 1,2,3\,. \end{aligned} \tag{48}$$

Dann folgt mit der Abkürzung $J^{1/2}\alpha = \sigma$:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + \mu^2 \psi + \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + 3\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\right)\dot{\psi} \\ - \varrho^{-2}\, \zeta^{-1} \sum_{l,k=1}^{3} (\zeta\, \psi_{|k}\, \gamma^{kl})_{|l} = 0, \end{aligned} \tag{49}$$

wobei der Punkt Differentiation nach $x^4 = t$ bedeutet. Wir lösen die Gleichung durch den Ansatz

$$\psi = y\,(x^4)\, Z\,(x^1\, x^2\, x^3)\,. \tag{50}$$

Dann folgt

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y} + \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + 3\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\right)\dot{y} + \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{\varrho^2}\right) y = 0\,; \\ \sum_{l,k=1}^{3} (\zeta\, Z_{|k}\, \gamma^{kl})_{|l} + \zeta\, \lambda^2\, Z = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Die Lösungen der zweiten Gleichung sind Kugelfunktionen. Wir wollen diese, wie auch die zugehörigen Werte von λ, nicht explizit angeben. Zumindest sehen wir, daß λ nicht von x^4 abhängt.

Interessanter ist die erste Gleichung. Zunächst machen wir den Ansatz:

$$y = \sigma^{-1/2}\, \varrho^{-3/2}\, \varphi\,. \tag{52}$$

Für φ erhält man dann die von $\dot{\varphi}$ freie Gleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \Bigg[\frac{1}{4}\left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \\ + \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\right)^2 - \frac{3}{2}\frac{\ddot{\varrho}}{\varrho} + \mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\Bigg]\varphi = 0\,. \end{aligned} \tag{53}$$

Wir machen nun die Annahme, daß

$$\mu^2 \gg \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right)^2,\ \frac{\ddot{\mu}}{\mu},\ \left(\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\right)^2,\ \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right)^2,\ \frac{\ddot{\varrho}}{\varrho},\ \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma}\,. \tag{54}$$

Dann geht die Gl. (53) über in

$$\ddot{\varphi} + \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)\varphi = 0\,. \tag{55}$$

Wir wollen vorerst die Möglichkeit nicht ausschließen, daß μ von J und damit von x^4 abhängt. Explizit läßt sich auch dann die Gl. (55) im allgemeinen nicht lösen. Doch können wir unter der oben gemachten Annahme über μ^2 leicht eine sehr gute Näherungslösung finden. Wir setzen:

$$\varphi = u\, e^{iv}\,, \tag{56}$$

bzw. den Realteil hiervon. Für u und v folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{u} - u\,\dot{v}^2 + \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right) u = 0\,; \\ 2\,\dot{u}\,\dot{v} + u\,\ddot{v} = 0\,. \end{aligned} \tag{57}$$

Wir dürfen nun $\ddot{u}$ in der ersten Gleichung vernachlässigen, so daß

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{1/2} \\ \text{bzw. } v &= \int^{t} \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{1/2} dt\,. \end{aligned} \tag{58}$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich dann

$$\frac{\dot{u}}{u} = -\frac{1}{2}\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}\,,$$

$$\text{d.h. } u = \dot{v}^{-1/2} = \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{-1/4}.$$

Damit ist also in genügender Näherung[5]:

$$\psi = \psi_0 \, Z_\lambda (x^1 x^2 x^3) \, J^{-1/4} \, a^{-1/2} \, \varrho^{-3/2}$$
$$\cdot \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{-1/4} \cos\left(\int^t \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{1/2} dt + \delta\right). \tag{59}$$

Wir wollen mit dieser Lösung den Tensor $\overset{4}{S}{}^m_n$ und die Materieinvariante im Mittel berechnen. Aus (6) folgt

$$\overset{4}{S}{}^m_n = \frac{1}{2} J^{1/2} a \left(\mu^2 \psi^2 - \dot{\psi}^2 + \sum_{k=1}^{3} \psi^{|k} \psi_{|k}\right) \delta^m_n$$
$$- J^{1/2} a \, \psi^{|m} \psi_{|n}; \tag{60}$$

und aus (8)

$$b = \frac{1}{4} J^{-1/2} a \left[\left(1 + 2 J \frac{a'}{a}\right)\right.$$
$$\left.\cdot \left(\mu^2 \psi^2 - \dot{\psi}^2 + \sum_{k=1}^{3} \psi^{|k} \psi_{|k}\right) + 4 J \mu \mu' \psi^2\right]. \tag{61}$$

Zunächst ist der Mittelwert von

$$\mu^2 \psi^2 - \dot{\psi}^2 + \sum_{k=1}^{3} \psi^{|k} \psi_{|k}$$

gleich null. Denn ist ϱ groß, so spielen (gegenüber μ) nur solche Werte von λ eine Rolle, die ebenfalls groß sind. Dann aber ist im Mittel über alle Kugelfunktionen, die zum Eigenwert λ^2 in (51) gehören, wenn wir uns Z_λ so normiert denken, daß das Mittel von $Z_\lambda{}^2$ gleich 1 ist:

$$\overline{\psi^{|m} \psi_{|n}} = \psi_0^2 \, J^{-1/2} a^{-1} \varrho^{-3} \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{-1/2}$$
$$\cdot \frac{1}{2} \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2 \delta^m_n \quad \text{für} \quad m, n = 1, 2, 3. \tag{62}$$

Hierbei ist das Zeitmittel von $\cos^2(\int^t \ldots)$ gleich 1/2 gesetzt worden. Wenn wir dies benutzen, so ist also

$$\overline{\mu^2 \psi^2 - \dot{\psi}^2 + \sum_{k=1}^{3} \psi^{|k} \psi_{|k}}$$
$$= \psi_0^2 \, J^{-1/2} a^{-1} \varrho^{-3} \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{-1/2}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \left[\mu^2 - \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right) + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right] = 0.$$

Andererseits ist

$$\overline{\psi^{|4} \psi_{|4}} = - \psi_0^2 \, J^{-1/2} a^{-1} \varrho^{-3} \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Somit ist für $m, n = 1, 2, 3$:

$$\overline{\overset{4}{S}{}^m_n} = - \frac{1}{6} \psi_0^2 \varrho^{-} \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2 \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{-1/2} \delta^m_n;$$
$$\overline{\overset{4}{S}{}^n_4} = 0; \tag{63}$$

$$\overline{\overset{4}{S}{}^4_4} = \frac{1}{2} \psi_0^2 \varrho^{-3} \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{1/2}; \tag{64}$$

und schließlich:

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \mu' \psi_0^2 \varrho^{-3} \mu \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{-1/2}. \tag{65}$$

Man verifiziert leicht, daß tatsächlich die Gl. M 2 (67) erfüllt ist.

Die Werte für $\overline{\overset{4}{S}{}^m_n}$ und $\bar{b}$ in den Gln. (63) bis (65) sind für ein festes λ berechnet worden. In Wirklichkeit wird man über alle λ mit irgendeiner unbekannten Verteilungsfunktion zu mitteln haben. Irgendeine Annahme über diese Verteilungsfunktion wollen wir aber nicht machen. Für die hier durch das Ψ-Feld beschriebene Materie folgt aber sofort aus den gewonnenen Ausdrücken, daß, wenn ϱ mit x^4 anwächst, sich $\varrho^3 \overline{\overset{4}{S}{}^m_n}$ und $\varrho^3 \bar{b}$ asymptotisch für große ϱ den Werten

$$\varrho^3 \overline{\overset{4}{S}{}^m_n} \sim 0 \quad \text{für } n \text{ oder } m = 1, 2, 3;$$
$$\varrho^3 \overline{\overset{4}{S}{}^4_4} \sim \frac{1}{2} \psi_0^2 \mu; \quad \varrho^3 \bar{b} \sim \frac{1}{2} \psi_0^2 \mu'$$

nähern. Das heißt aber, daß der Druck schneller als die Energiedichte abnimmt, so daß man für genügend große Werte von ϱ den Druck vernachlässigen kann. Man erhält für Energiedichte und Druck:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} J^{-3/2} u^{-1} \varrho^{-3} \psi_0^2 \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{1/2};$$
$$p = \frac{1}{6} J^{-3/2} u^{-1} \varrho^{-3} \psi_0^2 \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2 \left(\mu^2 + \left(\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2\right)^{-1/2}; \tag{66}$$

[5] Die hier dargelegten asymptotische Integration von (51) führt z. B. bei der Gleichung $y + 1/t\, y + \text{const}\, y = 0$ auf die asymptotische Darstellung der Bessel-Funktionen, die diese eben angeführte Gleichung exakt lösen.

und daraus für große ϱ in Übereinstimmung mit M 2 (68):

$$\varepsilon \sim \frac{1}{2} J^{-3/2} u^{-1} \varrho^{-3} \psi_0^2 \mu ; \qquad (67)$$
$$p \sim 0 .$$

Die Formeln für Druck und Energiedichte lassen natürlich auch die korpuskulare Interpretation von N Teilchen in der Volumeneinheit der Ruhemasse $\hbar\mu$ und des Impulses $\hbar\lambda/\varrho$ zu, wobei dann

$$N = \frac{1}{2\hbar} J^{-3/2} u^{-1} \varrho^{-3} \psi_0^2 \qquad (68)$$

ist. Die Teilchenzahl N braucht also nicht konstant zu sein. Für sehr kleine Werte von ϱ, überhaupt immer dann, wenn $|\lambda/\varrho| \gg \mu$, erhält man für ε und p dasselbe Verhältnis wie beim elektromagnetischen Strahlungsfeld nach M 2 (75):

$$\varepsilon = \frac{1}{2} J^{-3/2} u^{-1} \varrho^{-3} \psi_0^2 \frac{\lambda}{\varrho} ;$$
$$p = \frac{1}{6} J^{-3/2} u^{-1} \varrho^{-3} \psi_0^2 \frac{\lambda}{\varrho} . \qquad (69)$$

Die Materieinvariante $\bar{b}$ ist nur dann $\neq 0$, wenn die Masse der Teilchen mit J veränderlich ist. Die Theorie kann keine Aussage darüber liefern, ob diese Massen veränderlich sind, was wohl auch von einer klassischen Theorie nicht erwartet werden kann. Die naheliegendste Annahme ist, die Massen als konstant anzusehen, da es sich bei ihnen um mikroskopische Größen handelt, die durch $\hbar$ und l ($l \sim 10^{-13}$ cm = Elementarlänge) bestimmt sein müssen. Wenn wir aber μ als konstant ansetzen, so folgt

$$\bar{b} = 0 . \qquad (70)$$

Ich danke besonders herzlich Hrn. Prof. P. Jordan für die Förderung dieser Arbeit.

Eine neue quantenmechanische Behandlung von CH_4 und NH_4^+

Von HERMANN HARTMANN

Aus dem Institut für physikalische Chemie der Universität Frankfurt a. M.

(Z. Naturforschg. **2 a**, 489—492 [1947]; eingegangen am 24. Februar 1947)

CH_4 und NH_4^+ werden quantenmechanisch als Pseudo-Neon-Atome nach einer Methode behandelt, die der Slaterschen Methode für Atome entspricht. Die Eigenfunktionen nullter Näherung werden aus Eigenfunktionen *eines* Zentralproblems aufgebaut. Es ergibt sich sehr gute Übereinstimmung mit den empirischen Daten über Atomabstände, Suszeptibilitäten und das C-H-Bindungsmoment.

Das Molekül CH_4 ist oft der Gegenstand quantenmechanischer Rechnungen gewesen. Seine Bedeutung als das einfachste Molekül der organischen Chemie und seine Symmetrie lassen theoretische Behandlungen besonders naheliegend erscheinen.

Kürzlich ist in einer Arbeit von Buckingham, Massey und Tibbs[1] ein älterer Gedanke über die Elektronenstruktur des CH_4 wieder aufgenommen worden. Dieser Gedanke ist, daß wegen seiner hohen Symmetrie (T_d) und wegen des Fehlens innerer Schalen bei den Wasserstoffatomen das CH_4 näherungsweise als „Pseudo-Neonatom" betrachtet werden kann. Buckingham, Massey und Tibbs führen eine künstliche Abänderung des CH_4-Modells ein, indem sie die Ladung der vier Wasserstoffkerne gleichmäßig über die Oberfläche einer Kugel verteilen, der sie als Radius den empirischen C—H-Abstand geben. Dieses abgeänderte Modell ist wegen seiner Kugelsymmetrie für die Anwendung der Hartreeschen Methode des *self consistent field* geeignet. Der einzige Unterschied zwischen dieser von den genannten Autoren durchgeführten Behandlung des CH_4 und der Behandlung von Atomen nach Hartree ist, daß das Potential der positiven Ladungen im behandelten Modell von dem Potential einer einfachen Punktladung verschieden ist. Die Ergebnisse der Rechnungen von Buckingham, Massey und Tibbs zeigen,

[1] Buckingham, Massey u. Tibbs, Proc. Roy. Soc. [London] A **178**, 119 [1941].